

12.KLASS; LAHENDUSED JA HINDAMISJUHIS

Eesti koolinoorte LIII täppisteaduste olümpiaad MATEMAATIKA KOOLIVOOR Tallinnas, 2. detsembril 2005. a. XII klass

1. Leia neli arvu, millest kolm esimest on geomeetrilise jada järjestikusteks liikmeteks ja kolm viimast aritmeetilise jada järjestikusteks liikmeteks, kusjuures esimese ja neljanda arvu summa on 32 ja teise ning kolmanda arvu summa on 24.

LAHENDUS

1. Olgu need neli arvu a_1 , a_1q , a_1q^2 ja x .

Kuna 3 viimast arvu moodustavad aritmeetilise jada, siis vastavalt aritmeetilise keskmise seaduspärale

$$a_1q^2 = \frac{a_1q + x}{2}, \text{ millest } x = 2a_1q^2 - a_1q$$

Vastavalt ülesande tingimustele saan võrrandite süsteemi:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_1q^2 - a_1q = 32 \\ a_1q + a_1q^2 = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot (1 + 2q^2 - q) = 32 \\ a_1 \cdot (q + q^2) = 24 \end{cases}$$

$$\frac{a_1 \cdot (1 + 2q^2 - q)}{a_1 \cdot (q + q^2)} = \frac{32}{24}$$

$$\frac{1 + 2q^2 - q}{q + q^2} = \frac{4}{3}, \text{ millest } 4q^2 + 4q = 3 + 6q^2 - 3q$$

$$2q^2 - 7q + 3 = 0$$

$$q = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} \Rightarrow q_1 = 3 \text{ ja } q_2 = \frac{1}{2}$$

1. Kui $q_1 = 3$, siis $a_1 = \frac{24}{q + q^2} = \frac{24}{3 + 9} = 2$. Arvud on 2, 6, 18 ja 30.
2. Kui $q_2 = \frac{1}{2}$, siis $a_1 = \frac{24}{q + q^2} = \frac{24}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = 32$. Arvud on 32, 16, 8 ja 0.

Vastus. Otsitud arvud on 2, 6, 18 ja 30 või 32, 16, 8 ja 0.

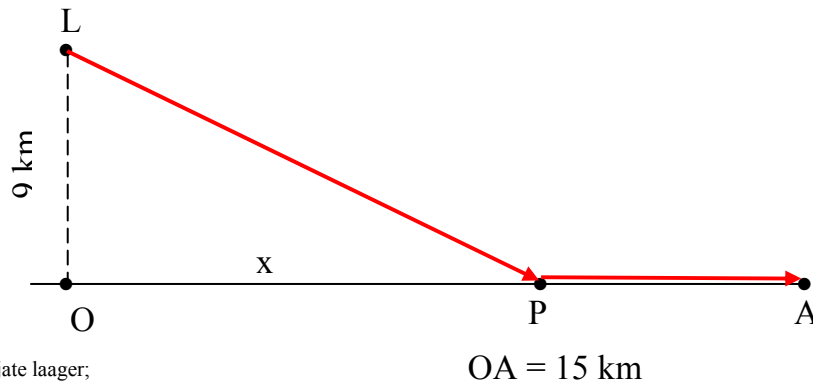
- | | |
|---|-------|
| 1. Õige võrrandisüsteemi (võrrandite) kokkupanemine | 3p |
| Võrrandisüsteemi õige lahendamine | 3p |
| Vastuse leidmine | 1p |
| | <hr/> |
| | 7p |

12.KLASS; LAHENDUSED JA HINDAMISJUHHIS

2. Metsas asuvast matkajate laagrist on sirge maantee lähima punktini 9 km ja sellest maantee punktist lähima asulani 15 km.

Leia vähim aeg, millega matkajad jõuaksid asulasse, kui maanteed mööda liikudes on matkajate kiirus $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja mööda

metsa $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. 2. Teen abistava joonise, millele märgin vajalikud tähised.



L - matkajate laager;

O - maantee lähim punkt;

A - asula;

P - punkt, kuhu matkajatel oleks vaja suunduda, et minimaalse ajakuluga asulasse jõuda.

Vastavalt algtingimustele LO = 9 km ja OA = 15 km. Olgu OP = x.

Sellisel juhul, saan matkajate aja arvutada avaldisest:

$$t = t_{LP} + t_{PA} = \frac{S_{LP}}{V_{LP}} + \frac{S_{PA}}{V_{PA}} = \frac{\sqrt{9^2 + x^2}}{4} + \frac{15 - x}{5} = \frac{1}{4} \sqrt{x^2 + 81} + 3 - \frac{1}{5}x$$

Ekstreemumkohad leian tingimusest $t' = 0$

$$t' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 81}} - \frac{1}{5} = \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 81}} - \frac{1}{5}$$

$$\frac{x}{4\sqrt{x^2 + 81}} - \frac{1}{5} = 0 \quad | \cdot 20\sqrt{x^2 + 81}$$

$$5x - 4\sqrt{x^2 + 81} = 0$$

$$5x = 4\sqrt{x^2 + 81} \quad | ()^2$$

$$25x^2 = 16 \cdot (x^2 + 81), \text{ millest } x = 12 \text{ (negatiivne lahend ei sobi)}$$

Aega kulub matkajatel $t_{x=12} = \frac{1}{4} \sqrt{12^2 + 81} + 3 - \frac{1}{5} \cdot 12 = 4,35$

Kuna $t_{x=15} = \frac{1}{4} \sqrt{15^2 + 81} + 3 - \frac{1}{5} \cdot 15 = \frac{\sqrt{306}}{4} \approx 4,37$ ja

$t_{x=0} = \frac{1}{4} \sqrt{0^2 + 81} + 3 - \frac{1}{5} \cdot 0 = \frac{9}{4} + 3 = 5,25$, siis on leitud koht miinimumkoht.

2. **Vähim aeg, millega matkajad jõuaksid asulasse, on 4 tundi ja 21 minutit.**

2. Joonis, algandmete väljakirjutus.

Muutuja valik ja selgitus

Aja funktsiooni väljakirjutus

Tuletise ja aja ekstreemväärtuste leidmine

Selgitus, miks leitud koht on miinimumkoht

1p

1p

1p

3p

1p

12.KLASS; LAHENDUSED JA HINDAMISJUHIS

3. Arvuta arvuti abita avaldise $\frac{\log_3 24}{\log_{72} 3} - \frac{\log_3 216}{\log_8 3}$ väärtus.

3. $\frac{\log_3 24}{\log_{72} 3} - \frac{\log_3 216}{\log_8 3} = \dots$ Lähen üle alusele 3.

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\dots = \frac{\log_3 24}{\frac{1}{\log_3 72}} - \frac{\log_3 216}{\frac{1}{\log_3 8}} = \log_3 24 \cdot \log_3 72 - \log_3 216 \cdot \log_3 8 =$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$= \log_3 (8 \cdot 3) \cdot \log_3 (8 \cdot 9) - \log_3 (8 \cdot 27) \cdot \log_3 8 =$$

$$= (\log_3 8 + \log_3 3) \cdot (\log_3 8 + \log_3 9) - (\log_3 8 + \log_3 27) \cdot \log_3 8 =$$

$$= (\log_3 2^3 + 1) \cdot (\log_3 2^3 + 2) - (\log_3 2^3 + 3) \cdot \log_3 2^3 =$$

$$= (3\log_3 2 + 1) \cdot (3\log_3 2 + 2) - (3\log_3 2 + 3) \cdot 3\log_3 2 = \dots$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Olgu $\log_3 2 = a$, siis

$$\dots = (3a + 1) \cdot (3a + 2) - (3a + 3) \cdot 3a = 9a^2 + 6a + 3a + 2 - 9a^2 - 9a = 2$$

Avaldise väärtus on 2.

3. Logaritmi aluse vahetamise valemi rakendamine
Korrutise logaritmi valemi rakendamine
Astme logaritmi valemi rakendamine
Ülesande tehniliselt õige lahendus

1p

1p

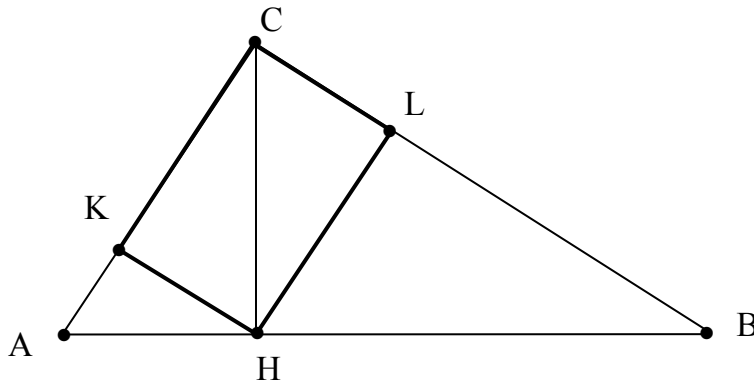
1p

4p

7p

12.KLASS; LAHENDUSED JA HINDAMISJUHIK

4. Täisnurkse kolmnurga ABC tipust C tõmmatud kõrguse aluspunkt hüpotenuusil AB on H. Olgu HK kolmnurga AHC kõrgus ning HL kolmnurga BHC kõrgus. Olgu S kolmnurga ABC pindala ning T nelinurga CKHL pindala. Tõesta, et kui hüpotenuusi AB pikkus on 1, siis on $T = 8S^3$.
4. Teen abistava joonise.



Eeldused: 1) Kolmnurk ABC on täisnurkne, 2) HC on kolmnurga ABC hüpotenuusile AB tõmmatud kõrgus, 3) HK on kolmnurga AHC kõrgus, 4) HL on kolmnurga BHC kõrgus, 5) Kolmnurga ABC pindala on S, 6) Nelinurga CKHL pindala on T, 7) $AB = 1$.

Väide: $T = 8S^3$.

Tõestus: Esmalt märgime, et nelinurk CKHL on ristkülik, sest tema kõik nurgad on täisnurgad.

Olgu lõigu BC pikkus a ja lõigu AC pikkus b. Sellisel juhul $S = \frac{ab}{2}$.

Täisnurksed kolmnurgad ABC ja ACH on sarnased, sest neil on ühine teravnurk. Seega on vastavad lõigud võrdelised ning

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AH = \frac{AC^2}{AB} = \frac{b^2}{1} = b^2$$

Samamoodi on ka kolmnurgad ABC ja CBH sarnased ning

$$\frac{BH}{BC} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow BH = \frac{BC^2}{AB} = \frac{a^2}{1} = a^2$$

Täisnurksed kolmnurgad ABC ja AHK on sarnased sarnasusteguriga b^2 , seega $HK = b^2 \cdot BC = b^2 a$.

Täisnurksed kolmnurgad ABC ja HBL on sarnased sarnasusteguriga a^2 , seega $HL = a^2 \cdot AC = a^2 b$.

Ristküliku CKHL pindala:

$$T = HK \cdot HL = b^2 a \cdot a^2 b = (ab)^3 = (2S)^3 = 8S^3$$

4. **M. o. t. t.**

Abistav joonis

Sarnaste kolmnurkade märkamine ja seoste väljakirjutamine

Seoste kasutamine ja tõestuse lõpuleviimine

1p

3p

3p

7p

12.KLASS; LAHENDUSED JA HINDAMISJUHIS

5. Tasandile on joonistatud hulk üksteisega mitteühtivaid sirgeid. Iga sirge puhul loeti kokku, mitu lõikepunkti teiste sirgetega tal on, ning saadud arvud liideti kokku. Summaks osutus arv 111.
- a) Juku väidab, et tasandil peab olema vähemalt 12 sirget. Kas tal on õigus?
 - b) Veel väidab Juku, et leidub vähemalt kolm sirget, mis lõikuvad samas lõikepunktis. Kas on tal õigus nüüd?

Lahendus

- a) **Jah.** Kui sirgeid oleks mitte rohkem kui 11, siis saaks igal sirgel olla maksimaalselt 10 lõikepunkti teiste sirgetega, kõikide sirgete puhul saaks see summa olla seega maksimaalselt 110. Ülesande tingimuste kohaselt on aga summa 111, seega on sirgeid vähemalt 12.
- b) **Jah.** Oletame vastuväiteliselt, et igas sirgete lõikepunktis lõikub ainult kaks sirget. Siis sirgete lõikepunktide arvu loendamisel saab iga lõikepunkt arvesse võetud täpselt kahel korral – üks kord kummagi sirge puhul. Sellest järeldub, et summa peab olema paarisarv, 111 on aga paaritu arv. Järelikult vastuväiteline oletus ei kehti.

5. a) osa tõestus
b) osa tõestus

3p
4p
7p